

Sada příkladů na spojitost a limity funkcí více proměnných

1. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech  $\mathbb{R}^2$ ?

2. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech  $\mathbb{R}^2$ ?

3. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ .

4. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech  $\mathbb{R}^2$ ?

5. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \log(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$ .

6. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{4}{3}}y}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech  $\mathbb{R}^2$ ?

7. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ .

8. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ .

9. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3-5x^3}{x^2+2y^2}$ .

10. Dokažte, že funkce  $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$  splňuje následující: ani jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  neexistuje, ale limita  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existuje.

Výsledky:

1. Funkce není spojitá v počátku protože např.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x, x) = \frac{1}{2}$ . V ostatních bodech spojitá je (podíl polynomů). (podrobnější řešení viz tutoriál)
2. Funkce spojitá v počátku, protože lze snadno odhadnout, že  $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  (v polárních souřadnicích odhadneme funkcí  $g(r) = r$ ). V ostatních bodech je triviálně spojitá (podíl polynomů).
3. Limita neexistuje protože např.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x, 0) = 0$ , ale  $\lim_{x \rightarrow 0} (x, x^2) = \frac{1}{2}$  (což je ve sporu s jednoznačností limity). (bylo součástí tutoriálu)
4. Funkce spojitá v počátku, protože lze snadno odhadnout, že  $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  (v polárních souřadnicích odhadneme funkcí  $g(r) = r$ ). V ostatních bodech je triviálně spojitá (podíl polynomů). (bylo součástí tutoriálu)
5. Asi nejsnadněji vidět v polárních souřadnicích  $f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = r \log(r^2) \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow 0+$  (známá limita, kterou lze zároveň snadno spočítat l'Hospitalem).
6. Platí  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \infty$  a tedy funkce není spojitá v počátku. V ostatních bodech spojitá je (podíl polynomů).
7. Platí  $f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = e^{r^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \log(r^2)}$ . Limita exponentu je 0 (podobně jako v příkladu 5) a tedy celková limita je 1.
8. Na čitatel použijeme vzoreček  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , což způsobí, že výraz  $x^2 + y^2$  se pokrátí. Zbyde spojitá funkce, do které už můžeme dosadit.
9. V polárních souřadnicích dostaneme  $\left| \frac{r^3(r \cos \alpha \sin^3 \alpha - 5 \cos^3 \alpha)}{r^2(1 + \cos^2 \alpha)} \right| \leq 6r$  pro  $0 < r < 1$  a tedy limita je rovna 0.